Pensiero matematico moderno.

Conferenza tenuta dal prof. Simone Newcomb *all'adunanza annuale della Società Matematica di New-York il giorno 28 dicembre 1893. — Versione dall' inglese, cortesemente concessa dall' autore, di* Ottavio Zanotti Bianco.

Chi, al pari di me, non è matematico nel senso moderno, sente naturalmente di doversi in qualche modo giustificare d'aver accettato l'invito col quale questa Società mi ha onorato, d'intrattenerla intorno ad un argomento matematico. Forse una giustificazione adeguata potrebbe trovarsi nella considerazione, che chi non si è profondamente addentrato in nessuno dei problemi contemporanei delle matematiche, ma che, come uno studente, ha avuto sufficiente passione per il soggetto da tenersi informato del corso generale del pensiero in esso, può prendere tale generale veduta che sia appropriata alla presente occasione. Io vi domanderò pertanto di considerare alcuni paragoni fra i modi di pensare sopra soggetti matematici del giorno d'oggi, e quei metodi che giunsero a noi dal passato, coll'intendimento di accennare in qual direzione stia il progresso, e quale sia il significato della ricerca matematica del tempo presente.

Fra le varie letture della mia gioventù fuvvi un'istoria dell'Europa moderna, che finisce con una rivista generale del progresso nelle arti, nelle scienze e nella letteratura e con un tentativo di previsione dell'avvenire di esse. Per quanto io ne posso giudicare, quell'opera fu scritta intorno al tempo di Eulero o Lagrange. Sull'argomento delle matematiche la conclusione dell'autore era che l'investigazione fruttifera pareva terminata, e che vi era poca prospettiva di brillanti scoperte nel futuro. A noi, un secolo dopo, questo giudizio potrebbe sembrare un esempio del pericolo di far profezie, e condurci a riguardare l'autore come uomo troppo propenso ad affrettate conclusioni. Può darsi tuttavia che un'analisi accurata conduca a ritenere le vedute dell'autore per meno avventate di quel che possano sembrare ora. Possiamo noi non dire, che nella speciale direzione, e lungo le speciali vie battute dall'indagine matematica un secolo fa, non si son fatte scoperte vera-

Digitized by Google

mente brillanti? Possiamo noi realmente dire che il campo di lavoro di Eulero, fu, dopo il suo tempo, largamente esteso? Dei grandi problemi che eludevano l'abilità degli antichi geometri, comprendendovi la quadratura del circolo, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, non ne risolvemmo pur uno. Il nostro solo progresso nel trattarli è stato di mostrare che essi sono insolubili. Al problema dei tre corpi non abbiamo aggiunto un solo degli integrali necessari alla completa soluzione. Il nostro calcolo integrale elementare è vecchio di due secoli. Per l'equazione generale del quinto grado solo mostrammo che non esiste soluzione alcuna. Senza dubbio, noi risolviamo molti dei problemi che i Bernoulli ed i loro contemporanei si divertivano a proporsi a vicenda, molto meglio di quello che essi abbiano fatto; ma, dopo tutto, potremmo noi toccare a qualche soluzione che fosse oltre i loro poteri? Io parlo con qualche diffidenza su questo punto, ma mi sembra che il progresso si verificò risalendo ai principii elementari, per partirne ad esaminare tutto il campo della ricerca matematica da un piano più elevato di quello sul quale stavano i nostri predecessori, piuttosto che continuando sulle loro traccie.

Noi possiamo illustrare questo passaggio a nuovi modi di pensare paragonando la dottrina di Euclide della ragione e proporzione colla nostra. Nessuno discute la bellezza od il rigore del procedimento, per mezzo del quale Euclide svolse questa dottrina nel suo libro quinto e l'applicò alla teoria dei numeri nel suo libro settimo. Ma possiamo noi trattenerci dal compiangere i nostri avi, che dovevano imparare le proposizioni complesse e le ponderose dimostrazioni del quinto libro, del quale noi possiamo scrivere in un sol foglio di carta tutti i procedimenti ed i risultati? Come disciplina mentale lo studio era eccellente; ma sembra appena possibile che si potesse rammentare le proposizioni ed i metodi di dimostrarle, se non se ne avesse altra conoscenza all'infuori di quella ricavata dall'opera stessa. Quando noi esaminiamo attentamente queste proposizioni, noi troviamo che, mentre Euclide riconosceva il fatto che, di due rapporti, uno potrebbe essere maggiore, minore od uguale di un altro, tuttavia egli non li riguardò mai come quantità, che potevano essere usate come operandi. Da questo punto di vista una ragione era sempre una relazione, ed una relazione non può esistere senza due termini.

Nell'accennare a questa complessità della dottrina di Euclide, non voglio si creda che io accetti il modo poco rigoroso in cui la dottrina in questione è d'ordinario svolta nei nostri trattati moderni. Ciò che noi dovremmo aver di mira si è di sostituire i metodi di Euclide con quelli che spettano alla matematica moderna. Oggidì noi intendiamo che una relazione fra due enti qualsivoglia della medesima specie

Digitized by Google

può sempre essere ridotta ad un solo termine, ad essa sostituendo un operatore la cui funzione sia di cambiare uno di questi enti nell'altro. Nel caso della relazione fra due linee, considerate semplicemente come quantità ad una dimensione, la qual relazione si chiama un rapporto, noi riguardiamo il rapporto come un fattore numerico o multiplo, che operando sopra una linea la cambia nell'altra. Ad esempio, quella relazione che Euclide avrebbe espressa dicendo che due linee stavano l'una all'altra come 5 a 2, ovvero che due volte una linea era uguale a cinque volte l'altra, noi esprimeremmo ora col dire che se noi moltiplicassimo una delle linee per due e mezzo, noi otterremmo l'altra. Questo potrebbe apparire semplice differenza di parole, ma è molto di più. È semplificazione di idee; è sostituzione di un sol concetto a due. Per esprimere una relazione occorrevano ad Euclide due termini; a noi ne basta uno.

Ma ciò non è la sola semplificazione. Una particolarità della nostra matematica moderna è che gli operatori medesimi sono riguardati come oggetti indipendenti di ragionamento; suscettibili di divenire operandi senza specificazione delle loro peculiari qualità come operatori. Così, in luogo di considerare il rapporto che io ho testè menzionato come un'operazione di moltiplicare una linea per due e mezzo, noi la riduciamo per ultimo alla semplice quantità due e mezzo, che noi possiamo concepire rimanga inerte finchè noi la portiamo all'attività come un moltiplicatore. Esso così assume una forma concreta capace di essere maneggiata nel pensiero, e di essere operata come se fosse una cosa distinta.

Questo esempio può offrire come un punto di partenza per un'illustrazione più larga del modo in cui noi abbiamo esteso i concetti che stanno a base del pensiero matematico. Prendiamo a riflettere sulla relazione fra una linea retta che parte da un punto, ed un'altra linea di eguale lunghezza partente dal punto medesimo, ma ad angolo retto colla prima. Se questa relazione fosse stata proposta ad Euclide come argomento a studiarsi, egli avrebbe probabilmente risposto, che quantunque molto più semplice di quelle intorno a cui si occupava, egli non poteva scorgervi nulla di fruttifero, e non avrebbe tratto da essa alcuna conclusione. Ma se poi proseguiamo a riflettere, troveremo davanti a noi un vasto campo, comprendente il primo concetto di gruppi; e con esso una parte importante delle nostre matematiche moderne. In conformità al principio già prestabilito, noi sostituiamo alla relazione fra queste due rette un'operatore che muterà la prima nella seconda. Noi definiamo quest'operatore dicendo che la sua funzione è di girare una retta di un angolo retto in un piano fisso che la contiene. Questa definizione permette di applicare l'operatore in

Digitized by Google

questione ad ogni linea nel piano. Applichiamola pertanto due volte di seguito alla stessa retta. Il risultato sarà una retta volgentesi alla direzione opposta a quella della originale. Una terza operazione la porterà di nuovo ad angolo retto dalla parte opposta alla seconda posizione; ed una quarta la ricondurrà alla sua posizione originale; il risultato essendo di portarla attorno di un circolo completo. Se ora noi consideriamo le operazioni che sarebbero state equivalenti a queste, una, due, tre, quattro rivoluzioni di un angolo retto come quattro operatori separati, noi vediamo che il loro risultato sarà o di lasciare la retta nella sua posizione originale, o di muoverla ad una di tre posizioni definite. Se quindi noi ripetiamo una di queste quattro operazioni tante volte quante ne piace, od in qualsiasi ordine vogliamo, noi unicamente condurremo la retta ad una delle quattro posizioni in questione. Così noi abbiamo un gruppo del quarto ordine, dotato della proprietà che la ripetizione di due qualunque delle operazioni del gruppo è equivalente a qualche unica operazione di esso.

Appena occorre che io richiami l'attenzione all'analogia famigliare fra queste operazioni e moltiplicazioni successive per l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$. Quest'ultima considerata come un moltiplicatore è fornita delle stesse proprietà del nostro operatore ruotante. Ripetuta due volte muta il segno o la direzione della quantità sulla quale opera; ripetuta quattro volte la riconduce al suo valore originale.

Noi abbiamo in tutti questi casi un'illustrazione molto semplice di una legge del pensiero, l'applicazione della quale forma la base di una parte importante della ricerca matematica moderna. La si può chiamare la legge di omologia. Io non sono certo di saperla definire rigorosamente, ma io credo che la si possa esprimere ad un dipresso come segue: Se abbiamo due classi di enti A e B, tali che ad ogni ente di una classe corrisponda un ente dell'altra, e ad ogni relazione fra due qualunque di una classe corrisponda una relazione fra i corrispondenti due dell'altra, allora tutto il discorso, il ragionamento, le conclusioni riguardanti l'una classe potranno essere applicati all'altra classe. Noi possiamo, naturalmente, estendere la legge a una corrispondenza fra cose o concetti, e simboli od altre forme di linguaggio.

Io penso che questa legge sia più universale che a primo aspetto appaia. Non solamente il progresso, ma l'esistenza stessa della nostra razza dipende dalla coordinazione fra i nostri processi mentali ed i processi dell'universo esterno, che fu gradatamente portata innanzi dall'attrito fra l'uomo e la natura attraverso innumerevoli generazioni. Un uomo è perfetto, potente, efficace quanto più il suo modo di rappresentarsi la natura è in armonia coi processi della natura stessa; ogni

Digitized by Google

processo di natura avendo la sua immagine nel pensiero, e *viceversa*. Ora, il linguaggio consiste nel coordinamento fra parole ed idee. Così noi passiamo dalla natura a ciò che vi corrisponde nel pensiero, e dal pensiero a ciò che vi corrisponde nel linguaggio, e così poniamo in azione una corrispondenza fra il linguaggio e la natura.

La ricerca scientifica moderna offre molti esempi dell'applicazione di questa legge che sarebbero meravigliosi, se non fossero così famigliari. Noi siamo così avvezzi alla predizione di un'ecclisse, che non vediamo in essa alcuna filosofia. E tuttavia non potrebbe un essere molto intelligente di un'altra sfera scorgere alcun che di meraviglioso nel fatto che con un metodo di tracciare simboli colla penna e l'inchiostro sulla carta, e di combinarli secondo certe semplici regole, è possibile di predire con certezza infallibile che l'ombra della luna in un dato giorno, ad una data ora e dato minuto, passerà sopra un determinato luogo della superficie della Terra. Certamente quell'essere potrebbe domandare con sorpresa come si possa ottenere un tale risultato. La nostra risposta sarebbe semplicemente questa: Vi è una corrispondenza da uno ad uno fra i simboli che il matematico traccia sulla sua carta e le leggi di movimento dei corpi celesti. Questi simboli incorporano i metodi stessi della natura.

L'introduzione e l'applicazione di omologie come quelle che ho indicate hanno forse il loro massimo valore, in quanto risparmiano pensiero. Nel campo della meditazione matematica hanno qualche rassomiglianza colle macchine che nel campo dell'economia risparmiano lavoro. Esse permettono di raggiungere i risultati del raziocinio senza passare per il processo del ragionamento nel caso particolare. Molto di quanto dissi illustra quest'uso del metodo, ma vi è un altro caso che fu così fruttifero da meritare speciale menzione: io intendo la teoria generale delle funzioni di una variabile immaginaria. Noi possiamo riguardare tali funzioni come rappresentanti in realtà una coppia di funzioni di una certa classe implicanti una coppia di variabili reali; ma la difficoltà di concepire le varie guise in cui le due variabili possono essere collegate, ed i risultati dei cambiamenti che esse possono subire, in tal guisa da cavar fuori tutti i risultati possibili, avrebbe reso impossibile il loro studio diretto.

Ma quando Gauss e Cauchy concepirono l'idea geniale di rappresentare due tali variabili, la reale e l'immaginaria, colle coordinate rettangolari di un punto in un piano, queste relazioni che prima esigevano grandi sforzi per essere concepite divennero relativamente semplici. Considerata come una grandezza, una variabile complessa, ovvero la somma di una quantità reale e di una puramente immaginaria, l'ultima essendo riguardata come una quantità misurata in unità in-

Digitized by Google

maginarie, fu rappresentata dalla lunghezza e posizione di una linea retta condotta dall'origine delle coordinate al punto le cui coordinate erano rappresentate dai valori della variabile. Una tal retta, quando se ne consideri e la lunghezza e la direzione, è ora famigliarmente nota come un vettore. La concezione del vettore sarebbe tuttavia in molti casi laboriosa. Ma il vettore è completamente determinato dal suo punto terminale, ad ogni vettore corrisponde uno ed un solo punto terminale e ad ogni punto terminale uno ed un solo vettore. Quindi si può astrarre dal vettore ed in pensiero badare solamente al punto terminale. Dacchè per ogni coppia di valori che noi assegniamo alle nostre variabili originali vi è un punto, ed un solo, noi possiamo in pensiero astrarre da entrambe quelle variabili e dai vettori che esse rappresentano, e considerare solamente il punto del quale esse sono le coordinate. Così la variazione continua delle due quantità, per quanto complessa possa essere, è rappresentata dal moto di un punto. Ora tal moto è molto facile a esser concepito. Noi possiamo considerarlo, senza la minima difficoltà, come compiente un numero di rivoluzioni attorno a qualche posizione fissa, mentre l'immaginare le corrispondenti variazioni nelle variabili algebriche stesse, richiederebbe un notevole sforzo di mente. Così, e solamente così, la bella teoria, prima svolta ampiamente da Cauchy, e poi continuata da Riemann, fu portata al suo stato attuale di perfezione.

Un altro esempio del principio in questione, in cui i due soggetti del ragionare sono così prossimamente d'una fatta, che non si risparmia pensiero, è offerto dal principio di dualità in geometria proiettiva. Qui si stabilisce una corrispondenza da uno a uno fra le relazioni mutue di punti e rette, col risultato che nel dimostrare una proposizione relativa a questi concetti noi contemporaneamente dimostriamo una proposizione correlativa formata dall'originale scambiando semplicemente le parole « punto » e « retta ».

Gli argomenti dei quali trattai finora appartengono ad un tempo all'algebra ed alla geometria. Invero uno dei grandi risultati dell'introduzione della interpretazione omologa nella matematica moderna è stato di unificare il trattamento dell'algebra e della geometria, e quasi di fonderle in un'unica scienza. Ad una larga classe di teoremi d'algebra spettano corrispondenti teoremi di geometria, ciascuno di una classe provandone uno dell'altra classe. Così le due scienze si porgono mutuamente aiuto. Nella geometria noi abbiamo una rappresentazione visibile dei teoremi algebrici; colle operazioni algebriche noi raggiungiamo conclusioni geometriche, cui potrebbe essere molto più difficile il pervenire col ragionamento diretto. Un esempio ragguardevole ce l'offre l'applicazione geometrica della teoria degl'inva-

Digitized by Google

rianti. Questi sono forse, fra le sorta di conclusioni algebriche, l'ultima che lo studente, al quale sono mostrati per la prima volta, possa credere abbia un'applicazione geometrica, tuttavia ben poco studio basta a stabilire un'omologia completa fra essi e la distribuzione di punti sopra una linea retta.

Quest'uso di omologie non segna la sola linea, lungo la quale noi siamo proceduti più dei nostri predecessori. Il progresso fu possibile solo coll'emanciparci da taluni dei concetti dell'antica geometria che signoreggiano tuttora nel nostro insegnamento elementare. L'illustrazione che ho già dato calza qui perfettamente. L'espressione della relazione di due linee rette a mezzo del moltiplicatore che cambierebbe l'una nell'altra è ora famigliare ad ogni scuolaro, e la relazione stessa era famigliare ad Euclide. Ma la relazione ancora più semplice di una retta con un'altra di eguale lunghezza normale ad essa, non fu mai immaginata da Euclide, e non ha corso nelle nostre scuole. Perchè è così? Mi sembra che ciò derivi dall'idea avita, che la matematica si occupa della misura, e che l'obbietto della misura si è di esprimere tutte le grandezze in misura ad una dimensione. Quest'idea ha così completamente informato il linguaggio, che noi ancora estendiamo l'uso della parola « eguale » a tutti i casi di questa specie particolare di uguaglianza lineare: noi diciamo che un circolo è uguale al rettangolo contornato dal suo raggio e dalla sua semicirconferenza. Noi fummo pertanto costretti ad inventare la parola « congruente » per la eguaglianza assoluta in ogni punto, o di qualificare l'aggettivo « eguale » con « identico » dicendo « identicamente eguale ». Naturalmente non vi è obbiezione di sorta al paragone di grandezze in questa maniera riferendole a misura ad una dimensione, o col presupporre che il cambiamento che una quantità deve subire per essere trasformata nell'altra dev'essere espresso da un solo parametro; ma cambiamenti che implicano due o più parametri sono altrettanto importanti quanto quelli che ne implicano uno, ed il tentativo di esprimere tutte le relazioni metriche riferendole ad un solo parametro ha posto al pensiero tali restrizioni, che mi sembra appropriato l'applicare il termine emancipazione al nostro atto di liberarci da esse. Per noi la matematica non è più la scienza della quantità. Ma anche se noi consideriamo che l'oggetto ultimo delle matematiche è relazione fra quantità, noi abbiamo raccolto un ricco compenso dalla emancipazione, perchè coll'uso delle nostre più vaste idee noi siamo in grado di raggiungere nuove conclusioni circa le relazioni metriche.

Io spero che il mio discorso non sarà trovato troppo accademico se continuo con qualche ulteriore illustrazione delle omologie dei gruppi. Ritornando alle omologie tra linee, invece di prendere due rette fra loro

Digitized by Google

ad angolo retto, consideriamone due facenti un angolo di 10°. Come già si notò, questa relazione è omologa con un operatore che faccia girare una sola retta di quell'angolo. Se noi ripetiamo continuamente questa operazione, noi porteremo la retta in trentacinque posizioni differenti, la posizione trentasciesima sarà identica con quella originale. Così in tutto noi avremo trentasei posizioni, espresse da quel numero di rette uscenti da un unico centro e facenti fra di loro angoli di 10°. Ora immaginiamoci trentasei operatori, la cui funzione sia di girare una retta, non importa quale, successivamente di 10°, 20°, 30°, ecc., fino a 360°, l'ultimo essendo equivalente ad un operatore che fa semplicemente niente. Questi trentasei operatori formeranno un gruppo, che noi sappiamo essere strettamente omologo colla moltiplicazione per le trentasei espressioni

$$e^{i\varphi}, \quad e^{2i\varphi}, \quad e^{3i\varphi} \ldots \quad e^{36i\varphi} = e^{0} = 1,$$

ove φ è l'arco di 10° in misura circolare.

Fin qui non considerammo che operazioni formate dalla ripetizione continua di una sola; nel linguaggio del soggetto, tutti i nostri gruppi sono costrutti da potenze di un solo operatore. Ora estendiamo il nostro metodo sostituendo un cubo alla nostra linea retta. Attraverso a questo cubo noi abbiamo un asse parallelo a quattro delle sue faccie piane. Col girare il cubo attorno a quest'asse di qualsiasi multiplo di 90°, noi otteniamo uno scambio di posizione fra quattro delle sue faccie. Questo processo di scambio è omologo colla rotazione di 90°, essendo in realtà ad essa equivalente, e quindi è anche omologo alla moltiplicazione per l'unità immaginaria. Ma vi è anche un'altra omologia. Indichiamo con A, B, C, D le 4 faccie del cubo parallele all'asse di rotazione. Allora il nostro gruppo di rotazioni sarà omologo colle potenze di una sostituzione ciclica fra le quattro lettere A, B, C, D. S'introduca ora un nuovo operatore, cioè la rotazione attorno ad un asse perpendicolare al primo, ma sempre di un arco di 90°. Ciò introduce nel problema un nuovo elemento, e ci permette di mutare il cubo da una qualunque posizione ad un'altra qualunque, vale a dire di eseguire ogni scambio fra le faccie che sia consistente col loro rimanere faccie dello stesso cubo. Qui noi abbiamo una serie di rotazioni, le quali, nel caso del cubo, sono omologhe con certe trasformazioni lineari che sono state svolte da Klein nel suo bellissimo lavoro sull'Icosaedro.

Ma è anche evidente che nell'introdurre queste rotazioni noi praticamente operiamo con quaternioni, l'operatore essendo il vettore unità. Così noi abbiamo un'omologia fra certe forme di moltiplicazione di quaternioni e trasformazioni lineari involgenti l'unità immaginaria.

Digitized by Google

Di più, dacchè queste rotazioni sono anche omologhe con sostituzioni praticate sopra i sei simboli rappresentanti le sei faccie del cubo, ne segue che vi è anche un'omologia fra certi gruppi di sostituzioni e certe trasformazioni lineari involgenti due quantità, un numeratore ed un denominatore, e moltiplicazioni di quaternioni per vettori unità.

Io ho preso un cubo come l'esempio più semplice. Evidentemente noi possiamo costrurre un maggior numero di gruppi di sostituzioni della stessa specie fra le faccie di qualsiasi solido regolare, come Klein ha fatto nel lavoro già citato. La relazione fra le sostituzioni lineari così trovata e la soluzione delle equazioni algebriche corrispondenti, forma uno dei più bei rami della nostra matematica moderna.

L'idea di gruppi di operazioni, quale io cercai di svolgerla, fu in questi ultimi anni così estesa da coprire una gran parte del campo dell'algebra e della geometria. Fra i primi in tale estensione vi fu Sophus Lie. Considerata dal punto di vista algebrico, la sua idea, nella sua forma più semplice, può essere espressa come segue. Noi abbiamo una certa quantità, x ad esempio. Noi abbiamo anche un'operazione qualsiasi che noi possiamo eseguire sopra questa quantità. Sia questa operazione dipendente da una certa quantità a che necessariamente entra in essa. Come uno degli esempi più semplici, noi possiamo ammettere che l'operazione sia quella di aggiungere a ad x. Poichè la quantità a può prendere un'infinità di valori, ne segue che vi saranno infinite operazioni appartenenti tutte ad una classe, le quali operazioni saranno distinte dal valore particolare di a in ogni caso. Così noi operiamo sopra x con uno di questi operatori, ed otteniamo un certo risultato; sia x'. Noi operiamo sopra x' con un secondo operatore della stessa classe, ed otteniamo un secondo risultato, sia x''. Se il risultato x'' si è potuto ottenere dalla quantità originale x a mezzo di qualche operazione della classe, qualunque sia l'operatore scelto in essa, allora queste operazioni saranno tali che il prodotto di due di esse sarà equivalente all'effettuazione di alcune di esse. Così, ripetendole per sempre noi non potremo arrivare ad altro che a quello che si otterrebbe a mezzo di qualche operatore. Vediamone un esempio semplice: se la nostra operazione consiste nell'addizione di una quantità arbitraria ad x, allora noi cambiamo x in x' aggiungendo ad x una certa quantità a, ed x' in x'', aggiungendovi una certa quantità b. Il risultato di queste due addizioni è lo stesso che se noi avessimo aggiunto da principio $a+b$. Occorre appena dire che la moltiplicazione di x per una quantità qualunque sarebbe un altro esempio della stessa specie. L'effettuazione di un qualsivoglia numero di moltiplicazioni successive sopra una quantità è sempre uguale ad una moltiplicazione sola pel prodotto di tutti i fattori delle moltiplicazioni separate.

Digitized by Google

Queste operazioni non sono confinate a quantità singole. Noi possiamo considerare che l'operazione sia effettuata sopra un sistema di quantità, che sono così trasformate in un egual numero di quantità differenti, ciascuna di queste nuove quantità corrispondendo ad una del primo sistema. Se una ripetizione dell'operazione sopra il secondo sistema di quantità dà origine ad un terzo sistema, che avrebbe potuto derivarsi dal primo sistema con un'operazione della stessa classe, allora tutte queste operazioni possibili formano un gruppo.

L'idea di tali sistemi di operazioni non è punto nuova. Fu sempre ovvio, da che si cominciò a studiare la teoria generale delle operazioni algebriche, che ogni combinazione delle operazioni di addizione, moltiplicazione e divisione poteva sempre essere ridotta ad un sistema in cui fosse solamente necessaria un'unica operazione di divisione — così come in aritmetica una frazione complessa, qualunque sia l'ordine di complessità dei suoi termini, può sempre essere ridotta ad una sola frazione semplice, cioè al rapporto di due intieri, ma non può in generale essere ridotta ad un intiero. Abel fece uso di questo teorema nella celebre memoria sulla impossibilità di risolvere l'equazione di quinto grado.

Un altro campo di pensiero matematico, affatto distinto da quello sul quale gettammo uno sguardo, può essere chiamato il paese delle fate della geometria. Per fare un matematico si richiede un più alto sviluppo del suo potere speciale, che non sia dato alla pluralità degli uomini. Quando egli entra in quella terra incantata egli deve, se vuol approfittare della buona occasione, prendere ali che lo porteranno molto oltre i voli, ed anche la vista dei mortali ordinarii. Al più immaginoso di questi, un essere racchiuso in una sfera, la cui superficie sia assolutamente impenetrabile, sarebbe così sicuramente imprigionato che neppure uno spirito potrebbe fuggirne, a meno di essere così etereo da passare attraverso alla sostanza della sfera. Ma lo spirito matematico, nello spazio a quattro dimensioni, potrebbe saltar fuori senza toccare neppure un punto del globo. Prendendo posizione ad una breve distanza dalla terra, egli potrebbe col suo telescopio investigare ogni particella di essa, dal centro alla superficie, senza alcuna necessità che la luce passi attraverso ogni parte della sostanza della terra. Se fosse abile ginnastico, egli potrebbe spiccare un salto mortale e cadere colla destra a sinistra, così come egli appare ai nostri occhi, se visto per riflessione in uno specchio, e ciò senza soffrire alcuna distorsione o male di sorta. Una linea retta, od una linea che ad ogni nostro esame apparirebbe retta, se seguìta a lungo sufficientemente, potrebbe ritornare su sè stessa. Lo spazio stesso può avere una delimitazione, o piuttosto, ve ne può essere solo una certa quantità; procediamo innanzi, per sempre,

Digitized by Google

e noi potremmo trovarci sempre ritornanti al punto di partenza. Tutti questi risultati, invero, non si ottengono semplicemente in forma di scherzo, ma con dimostrazioni geometriche rigorose.

Le considerazioni che condussero a questa forma di spazio sono così semplici che esse possono venir delineate senza difficoltà. Quando il giovane incomincia lo studio della geometria piana, la sua attenzione è diretta intieramente su figure giacenti in un piano. Per lui lo spazio ha solo due dimensioni. In un dato punto di una linea retta si può innalzare una sola perpendicolare. Muovendo una linea qualunque nel piano, egli può descrivere una superficie, ma un solido è affatto fuori del suo campo. Egli non può condurre una linea dall'esterno all'interno di un cerchio, senza intersecarlo. Sopra una data base si possono costrurre solo due triangoli di lati dati, uno giacente da una parte della base, l'altro dall'altra. Quando egli giunge alla geometria solida, le sue concezioni si estendono grandemente. Da un dato punto di una retta egli può condurre tante perpendicolari quante vuole. Se egli ha due rette fra loro perpendicolari, egli può condurne una terza che sia perpendicolare ad entrambe. Una superficie piana non è avvinta al suo proprio piano, ma può essere mossa su e giù così da descrivere un solido. La caratteristica di questo movimento è che esso costantemente porta ogni parte del piano ad una posizione, che nessuna parte di esso prima occupava.

Ora, è un principio fondamentale della scienza pura che la libertà di fare ipotesi è illimitata. Non è necessario di provare che l'ipotesi è una realtà, prima che ci sia permesso di farla. È legittimo di anticipare tutte le possibilità. È quindi, pertanto, un esercizio perfettamente legittimo del pensiero l'immaginare qual sarebbe il risultato se noi in geometria non ci fermassimo alle tre dimensioni, ma costruissimo una maniera di spazio che ne avesse quattro (*). Come il ragazzo, ad un certo stadio dei suoi studii, passa dalle due alle tre dimensioni, così possono i matematici passare con eguale facilità dalle tre alle quattro dimensioni. Egli s'imbatte bensì nella difficoltà di non poter tracciare figure in quattro dimensioni, e le sue facoltà sono così limitate che egli non può nella sua mente costrurre l'immagine delle cose come apparirebbero nello spazio a quattro dimensioni. Ma questa mancanza non gl'impedisce di ragionare sul soggetto, ed una delle più ovvie

---

(*) La libertà delle ipotesi è piena; però non sarà inutile il ricordare ai lettori della Rivista che cogli spazî a più dimensioni si introducono nuovi postulati; mentre si perfeziona la Geometria riducendone il numero. Veggasi vol. I (1891), pag. 66 della Rivista. Nota dell'editore.

Digitized by Google

conclusioni alle quali arriverebbe è questa: Come nello spazio a due dimensioni si può in un dato punto condurre una retta perpendicolare ad un'altra, e coll'aggiungere una terza dimensione, una terza retta, può condursi perpendicolare a queste due; così con una quarta dimensione noi possiamo condurre una retta che sia perpendicolare a tutte tre. È vero che noi non possiamo immaginare come apparirà quella retta, o dove dovrà essere collocata, ma ciò è puramente in causa della limitazione delle nostre facoltà. Come una superficie descrive un solido abbandonando continuamente lo spazio nel quale essa sta al momento, così un solido a quattro dimensioni sarà generato da un moto continuo che sia costantemente diretto all'infuori di questo spazio a tre dimensioni nel quale il nostro universo sembra esistere. Siccome un uomo confinato entro un circolo, può sfuggirne saltando sopra esso, così il matematico, se posto dentro una sfera in uno spazio a quattro dimensioni, salterebbe semplicemente sopra essa altrettanto facilmente di quello che faremmo noi sopra un circolo segnato sul pavimento. Aggiungasi allo spazio una quarta dimensione, e vi è luogo per un indefinito numero di universi, tutti l'un dopo l'altro, come ve n'è per un indefinito numero di fogli di carta quando li poniamo l'un sopra l'altro.

Dal punto di vista delle scienze fisiche, la questione se l'attualità di una quarta dimensione possa essere considerata come ammissibile è molto interessante. Tutto quello che possiamo dire è che, fin dove giunge l'osservazione, tutte le conclusioni legittime sembrano essere contro di essa. Nessuna induzione della scienza fisica è più universale o completa di quella che tre condizioni fissano la posizione di un punto. Il fenomeno della luce mostra che nessuna vibrazione va fuori dello spazio a tre dimensioni, neppure nell'etere luminifero. Se vi è un altro universo, od un gran numero di altri universi, fuori del nostro proprio, noi possiamo unicamente dire che non abbiamo alcuna prova che esercitino sul nostro alcuna influenza. È ben vero che quelli che si dilettano a spiegare avvenimenti anomali coll'azione di esseri, intorno ai quali d'altronde nulla conosciamo, hanno qui un ben facile campo per la loro immaginazione. La questione della sufficienza delle leggi di natura a chiarire tutti i fenomeni, è tuttavia troppo vasta per essere al presente discussa. A prova della limitatezza delle nostre facoltà in questa direzione, è a notarsi che noi siamo incapaci a pensare uno spazio a due dimensioni, altrimenti che come contenuto in uno spazio a tre. Un puro piano, con niente da ciascuna banda, è per noi inconcepibile. Noi siamo così costretti, per quanto valgono le nostre concezioni, ad accettare tre dimensioni e non di più. Noi abbiamo in questo un risultato legittimo dell'esperienza universale

Digitized by Google

attraverso a tutte le generazioni, che è quello di uno spazio triplamente esteso.

Intimamente connessa con ciò è l'idea di quello che viene talvolta chiamato lo spazio curvo. Confesso che questa espressione non mi piace, perchè non vedo come lo spazio per sè possa essere considerato come curvo. La geometria non è la scienza dello spazio, ma la scienza delle figure nello spazio, possedenti le proprietà di estensione e di mobilità che noi constatiamo essere comuni a tutti i corpi materiali. La questione qui sollevata è molto vecchia, ed in via generale la sua storia è famigliare.

I matematici hanno spesso tentato di costrurre una geometria senza l'uso di quello che è comunemente chiamato il nono assioma di Euclide, che sembra a me meglio espresso quando si dice che in un piano si può condurre una sola retta che debba essere parallela ad un'altra retta nel piano, nel senso di non incontrarsi mai in nessuna direzione. Tuttavia ogni conato per costrurre una geometria elementare senza quest'assioma risultò involgere una fallacia in qualche punto del ragionamento. Questa considerazione condusse Lobatchewsky, ed indipendentemente da lui, io credo, Gauss, a ricercare, se non potesse venir composta una geometria nella quale quest'assioma non fosse valido; nella quale, cioè, fosse possibile che avendosi in un piano due rette parallele, l'una potesse girare di un angolo piccolissimo senza però incontrare l'altra in alcuna direzione. La possibilità di ciò fu presto dimostrata, e si compose così un sistema di geometria nel quale la somma degli angoli di un triangolo piano potrebbe essere minore di due angoli retti.

Dopo fu introdotta anche l'ipotesi opposta. Si trovò che, date in un piano due rette parallele, si potrebbe supporre che esse s'incontrassero da ultimo in entrambe le direzioni. Questa ipotesi potrebbe anche essere fatta senza che vi fosse più d'un punto d'intersezione, ogni retta rientrando in sè stessa. La geometria risultante da queste due ipotesi fu ridotta ad un sistema rigoroso da Klein.

Il predire il futuro della scienza matematica sarebbe un tentativo arrischiato. Se lo si facesse, potrebbe sembrare che, in vista degli straordinarii lavori dell'intelletto umano che caratterizzano il nostro tempo, la via più sicura sarebbe di predire grandi scoperte in questo ed in tutti i rami della scienza. Si propone talvolta la questione, se non fosse ancora possibile che venisse inventato un metodo matematico, che fosse sul calcolo infinitesimale un progresso tanto grande, quanto questo lo fu sui metodi di Euclide e di Diofanto. In quanto al risolvere i problemi che ora ci si parano innanzi, può darsi che la strada più sicura sia quella di rispondere a quella questione colla negativa. Non

Digitized by Google

è egli vero in fisica come in matematica, che le grandi scoperte sono state fatte in direzioni inattese, e che i problemi che affaticavano i nostri avi ancora frustrano i nostri sforzi? Noi dobbiamo certamente ricordare che la scoperta di ciò che non poteva esser fatto fu un elemento importante nel progresso. Ad ogni piè sospinto noi c'imbattiamo nella ferrea legge della conservazione dell'energia; in ogni direzione noi scorgiamo i limiti del possibile. Le matematiche del ventesimo secolo potranno essere molto differenti dalle nostre; forse lo scolaro comincierà l'algebra colla teoria dei gruppi di sostituzioni, come egli potrebbe ora solo per abitudini ereditate. Ma non ne segue che la nostra posterità risolverà molti dei problemi che noi non possiamo sciogliere, od inventerà un algoritmo più potente del calcolo.

Digitized by Google